IES GONZALO NAZARENO

CONTROL DE GEOMETRÍA 2º Bach. Ciencias de la Salud- 3 de mayo- 2004

Control de Geometría 3

1. Calcula el punto simétrico del punto A(1,-1,2) respecto de la recta r: $\begin{cases} x+4y-z=2 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$

2. Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,m)$ y $\vec{v}=(4,m,2)$
   a. Halla, si es posible, el valor de m para los vectores anteriores sean paralelos.
   b. Halla, si es posible, el valor de m para los vectores anteriores sean perpendiculares.
   c. En este último caso, halla si es posible el área del rectángulo que forman.

3. Determina la ecuación de un plano que pasa por el punto de intersección de $\begin{cases} x+z=-1 \\ x+y=3 \\ y+z=2 \end{cases}$ y contenga a la recta determinada por (1,0,1) y (-1,1,2)

4. Dado el plano 2x+ 2y+ 2z- 4=0:
   a. Halla los vértices A, B y C del triángulo que se forma en la intersección de dicho plano con los ejes coordenados.
   b. Halla el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

5. Define el producto vectorial de dos vectores. Escribe su expresión analítica e indica dos procesos en los que se aplique dicho producto.

1. 2’5 puntos	**2. 1’5 puntos**	**3. 2 puntos**	**4. 2’5 puntos**	**5. 1’5 puntos.**

SOLUCIONES AL CONTROL DE GEOMETRÍA 2º Bach. Ciencias 3 de mayo- 2004

1. Para calcular el simétrico de un punto respecto de una recta necesitamos :
Hallar un plano π que sea perpendicular a la recta r y que contenga el punto A, la intersección de la recta y el plano nos da la proyección ortogonal que será el punto medio de A y su simétrico A’.

Pasamos la recta r a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv -x + y + 3z + d = 0$

Y haciéndole pasar por A $\Rightarrow$ -1-1+ 6+ d = 0 $\Rightarrow$ d = -4 $\Rightarrow \pi \equiv -x + y + 3z - 4 = 0$. La intersección de la recta y el plano nos da el valor de λ, $-(2-\lambda) + \lambda + 3(3\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow 11\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{11}$, es decir :

P(proyección ortogonal) ($\left(2-\frac{6}{11}, \frac{6}{11}, \frac{18}{11}\right) = \left(\frac{16}{11}, \frac{6}{11}, \frac{18}{11}\right)$. Como P es punto medio de AA’ $\Rightarrow A'(x,y,z) / \quad \frac{1+x}{2} = \frac{16}{11} \Rightarrow x = \frac{21}{11}$ y resolviendo y, z de la misma manera nos da que $\boxed{\text{A’ } \left(\frac{21}{11}, \frac{32}{11}, \frac{14}{11}\right).}$

2. Dados los vectores $\vec{u} = (2,1,m)$ y $\vec{v} = (4,m,2)$

a. Halla, si es posible, el valor de m para los vectores anteriores sean paralelos.
b. Halla, si es posible, el valor de m para los vectores anteriores sean perpendiculares.

En este último caso, halla si es posible el área del rectángulo que forman.

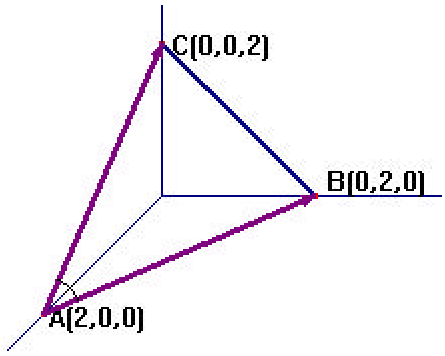
Si son **paralelos** $\Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{m} = \frac{m}{2} \Rightarrow$ **es imposible**, ya que por un lado m = 2 y por otro m = $\pm\sqrt{2}$

Si son **perpendiculares** $\Rightarrow 2\cdot 4 + 1\cdot m + m\cdot 2 = 0 \Rightarrow$ 3m= -8 $\Rightarrow m = \frac{-8}{3} \Rightarrow \vec{u} = (2,1,\frac{-8}{3})$ y $\vec{v} = (4,\frac{-8}{3},2)$

El **área** **del** **rectángulo** que forman es $\left|\vec{u}\ x\ \vec{v}\right| = \left|\left(2,1,\frac{-8}{3}\right) x \left(4,\frac{-8}{3},2\right)\right| = \left|\left(\frac{-46}{9}, \frac{-44}{3}, \frac{-28}{3}\right)\right| = \frac{1}{9}\sqrt{46^2 + 132^2 + 84^2}$ = 18’12 u^2.

3. Calculamos primero el punto de intersección de los tres planos. Es un sistema fácil, que por sustitución sale P(0,3,-1), con los otros dos puntos A(1,0,1) y B(-1,1,2) tenemos lo que necesitamos para determinar un plano, hallamos los vectores $\vec{PA} = (1,-3,2)$, $\vec{PB} = (-1,-2,3) \Rightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y-3 & -3 & -2 \\ z+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

x· (-5)+(y-3) (-5)+(z + 1)· (-5) = 0 $\Rightarrow$ dividiendo por (-5) $\Rightarrow \pi \equiv$ $\boxed{\textbf{x + y + z –2 = 0 es el plano pedido}}$



4. Los vértices del triángulo se calculan por las intersecciones de los ejes coordenados con el plano dado, el plano de forma simplificada es $p \equiv x + y + z - 2 = 0$**,** los ejes coordenados tienen por ecuaciones:
OX $\equiv (l,0,0)$, OY $\equiv (0,a,0)$ y OZ $\equiv (0,0,b)$, que sustituyendo cada uno en el plano nos da los puntos:
Con OX, $l = 2 \Rightarrow$ **A(2,0,0)** , con OY $a = 2 \Rightarrow$ **B(0,2,0)** y con el eje OZ $b = 2 \Rightarrow$ **C(0,0,2).**

Para calcular el ángulo que forman $\vec{AB}(-2,2,0)$ y $\vec{AC}(-2,0,2)$, utilizamos la fórmula del coseno:

$$\cos\left(\vec{AB},\vec{AC}\right) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{AC}\right|} = \frac{4}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$ **el ángulo que forman los dos lados es de 60º.**

Estaba claro, es un triángulo equilátero.

6. El producto vectorial de dos vectores **u**(u_1, u_2 , u_3) y **v**(v_1, v_2, v_3) , se define como un vector: **u** x **v,** que como vector tiene un módulo dirección y sentido.

Módulo $|u \, x \, v| = |u| \cdot |v| \, |sen(u,v)|$

Dirección de **u** x **v,** es la de un vector perpendicular a **u** y a **v.**

Sentido de **u** x **v,** es tal que la orientación de la terna **(u, v, u** x **v)** es positiva (el determinante formado por los tres vectores en ese orden es positivo)

La expresión analítica es la siguiente **u** x **v** = $\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} k$

Dos de los procesos donde se utiliza el producto vectorial en geometría son:

- Para hallar un vector perpendicular a otros dos **n** = **u** x **v ,** muy útil en la ecuación general del plano, rectas perpendiculares a planos, etc.
- Para hallar el área de un paralelogramo ya que esta es $|u \, x \, v| = |u| \cdot |v| \, |sen(u,v)| = |u| \cdot h$